Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
3. Klausur

21. Mai 2025

Zone A Nachmittag | **Zone B** Nachmittag | **Zone C** Nachmittag

1 Stunde 15 Minuten

Hinweise für die Kandidaten

- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[55 Punkte]**.

2225 – 7173

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite. Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, müssen von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

1. [Maximale Punktzahl: 28]

Die folgende Aufgabe untersucht die Eigenschaften einer Kurvenschar. Diese Kurvenschar wird dann mit einer homogenen Differentialgleichung verknüpft.

Betrachten Sie zunächst die Kurve gegeben durch $y = \dfrac{x\left(x^2 - 16\right)}{x^2 + 16}$.

(a) (i) Skizzieren Sie die Kurve von y für $-10 \le x \le 10$. [1]

(ii) Geben Sie die Koordinaten der Punkte an, bei denen die Kurve die x-Achse schneidet. [1]

(iii) Geben Sie die Koordinaten des lokalen Maximums und die Koordinaten des lokalen Minimums an. [2]

(b) Geben Sie an, ob die Kurve gegeben durch $f(x) = \dfrac{x\left(x^2 - 16\right)}{x^2 + 16}$ ungerade, gerade oder keines von beiden ist. Begründen Sie Ihre Antwort. [2]

Betrachten Sie nun die allgemeine, durch $y = \dfrac{x\left(x^2 - A\right)}{x^2 + A}$ gegebene Kurve. Dabei ist A eine positive Konstante und $x \in \mathbb{R}$.

(c) Beweisen Sie für $f\left(x\right) = \dfrac{x\left(x^2 - A\right)}{x^2 + A}$, dass $f'\left(\sqrt{A}\right)$ unabhängig von A ist. [4]

(d) (i) Zeigen Sie, dass $x - \dfrac{2Ax}{x^2 + A} \equiv \dfrac{x\left(x^2 - A\right)}{x^2 + A}$. [2]

(ii) Bestimmen Sie unter Nutzung der Vorarbeit die Gleichung der schrägen Asymptote an die Kurve. [1]

(iii) Notieren Sie die Koordinaten eines Punktes auf der Kurve, an welchem die schräge Asymptote parallel zur Tangenten der Kurve an diesem Punkt verläuft. [1]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

Betrachten Sie nun die Differentialgleichung $x^2 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x(x+y) - y^2$ mit $x \neq 0$, $y \neq \pm x$.

Mit Hilfe der Substitution $y = vx$ kann die Differentialgleichung folgendermaßen geschrieben werden: $x \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 1 - v^2$.

(e) Zeigen Sie unter Verwendung von Partialbrüchen, dass $\int \frac{1}{1-v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{A(1+v)}{1-v}\right|$, mit einer positiven Konstanten A. [5]

(f) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung in der Form $x^2 = \left|\frac{A(x+y)}{x-y}\right|$ ausgedrückt werden kann, wobei A eine positive Konstante ist. [5]

Betrachten Sie jetzt nur den Fall $\frac{A(x+y)}{x-y} > 0$.

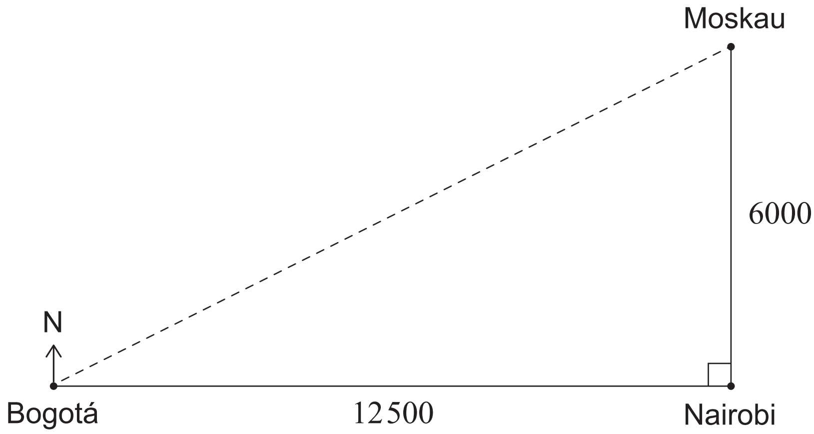
(g) Zeigen Sie, dass $y = \frac{x(x^2 - A)}{x^2 + A}$ eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ist. [4]

2. [Maximale Punktzahl: 27]

In der folgenden Fragestellung werden die Entfernungen und die Richtungswinkel zwischen Städten auf einer ebenen Oberfläche mit den Entfernungen und den Richtungswinkeln zwischen Städten auf einer Kugel verglichen.

Betrachten Sie ein Modell, bei dem die Städte Bogotá, Moskau und Nairobi auf einer ebenen Oberfläche liegen. In diesem Modell liegt Nairobi $6000\,\text{km}$ südlich von Moskau und Bogotá $12\,500\,\text{km}$ westlich von Nairobi, wie in der folgenden Abbildung dargestellt.

Abbildung nicht maßstabsgerecht



(a) (i) Finden Sie die Entfernung von Bogotá nach Moskau. [2]

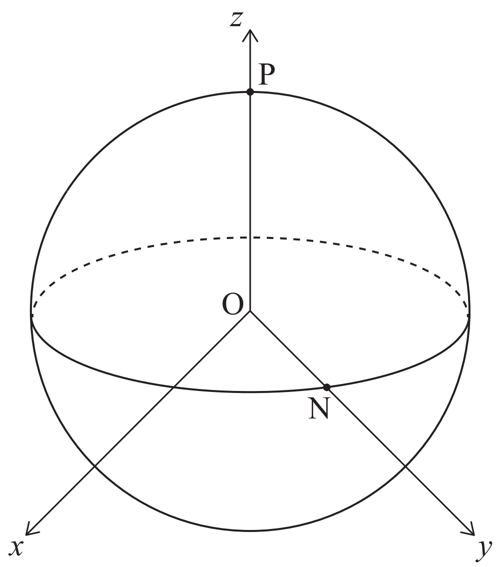
(ii) Finden Sie den Richtungswinkel von Moskau nach Bogotá. Geben Sie Ihre Antwort in Grad an. [3]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

In Wirklichkeit liegen diese drei Städte auf der gekrümmten Erdoberfläche, wodurch sich die in Teil (a) angegebenen Entfernungen und Richtungen ändern.

Betrachten Sie nun ein gekrümmtes Modell mit einem Koordinatensystem (x, y, z), dessen Ursprung O im Mittelpunkt der Erde liegt. Die Entfernung wird in diesem System in tausenden von Kilometern angegeben, und die Erde wird als Kugel mit einem Radius von $6000\,\mathrm{km}$ modelliert. Der Nordpol P liegt auf der z-Achse, und Nairobi (N) liegt in diesem Modell am Äquator und auf der y-Achse.



Der Ortsvektor von P ist $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, und der Ortsvektor von N ist $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = \boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

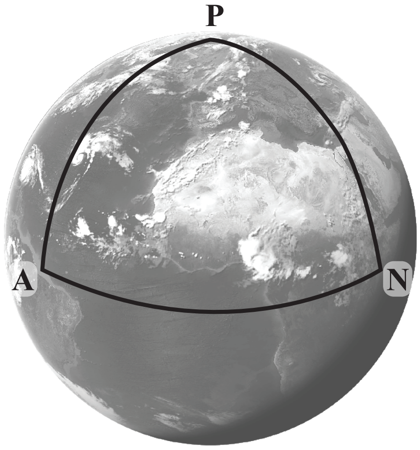
(b) (i) Finden Sie den Winkel zwischen $\boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{n}$ mit Hilfe des Skalarprodukts. [2]

(ii) Zeigen Sie, dass die Entfernung zwischen P und N entlang des Bogens von P nach N $3000\pi\,\mathrm{km}$ beträgt. [2]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Punkt A liegt ebenfalls auf dem Äquator und hat den Ortsvektor $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, wie im folgenden Diagramm dargestellt.



P, N und A sowie die sie verbindenden Bögen bilden ein Kugeldreieck.

Der Winkel am Punkt A ist definiert als der Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{p}$ und $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{n}$.

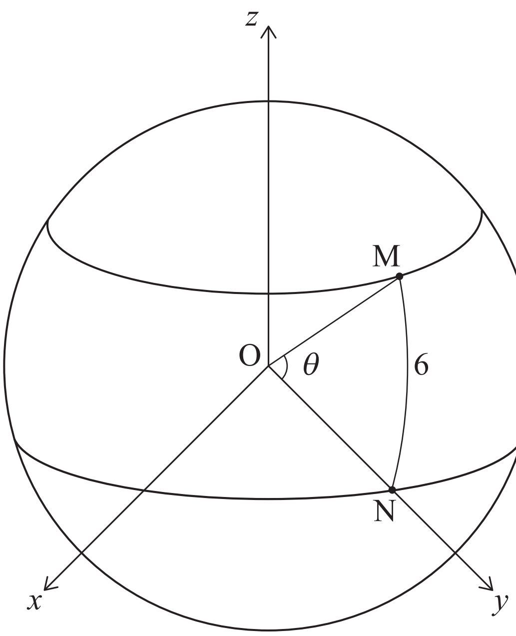
(c) (i) Finden Sie den Vektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{p}$. [2]

(ii) Zeigen Sie, dass der Winkel am Punkt A im Kugeldreieck $90°$ beträgt. [3]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 2)

Der Ortsvektor von Moskau (M) ist $\vec{\mathrm{OM}} = \boldsymbol{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6\cos\theta \\ 6\sin\theta \end{pmatrix}$, wie im folgenden Diagramm dargestellt.



Die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten auf der Kugel liegt auf einem Kreisbogen auf der Kugel mit Mittelpunkt O. In diesem Modell beträgt die kürzeste Entfernung von Moskau nach Nairobi $6000\,\mathrm{km}$.

(d) Zeigen Sie, dass $\theta = 57{,}3°$ beträgt (auf drei signifikante Stellen genau). [2]

Bogotá (B) liegt westlich von Nairobi und hat den Ortsvektor $\vec{\mathrm{OB}} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 6\sin 120° \\ 6\cos 120° \\ 0 \end{pmatrix}$.

(e) Finden Sie die kürzeste Entfernung von Bogotá nach Moskau auf der Kugel. [5]

Der Richtungswinkel von B nach M ist definiert als der Winkel am Punkt B im Kugeldreieck aus B, M und P. Es gilt: $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} 36\cos 120° \\ -36\sin 120° \\ 0 \end{pmatrix}$.

(f) Finden Sie mit Hilfe der Methode aus Teil (c) den Richtungswinkel von Bogotá nach Moskau. [6]

Quellenangaben:

2(c) Google Maps/Google Earth. Daten aus Data SIO, NOAA, U.S. Navy, NGA, GEBCOLandsat / Copernicus, IBCAO, U.S. Geological Survey, PGC/NASA. Bildmaterial vom 14. Dezember 2015. Abbildung verfügbar unter: https://earth.google.com/web/@12.01529518,-18.56070747,-158.39383184a,23597813.93249989d,30.00008083y,359.99981502h,0t,0r/data=CgRCAggBOgMKATBCAggASg0I____________ARAA.